САММАТ-2021
Решение задач 8 класса
1 вариант

Задача №1. Найдите четырехзначное число $\overline{abca}$ (в десятичной записи), равное $(5c+1)^2$.

Решение: $\overline{abca} = (5c+1)^2$, $(a \neq 0)$.

$1000a + 100b + 10c + a = 25c^2 + 10 + 1$

$1001a + 100b = 25c^2 + 1$

Решается пересмотром всех значений c от 0 до 9.

$c = 0$	$1001a + 100b = 1 \quad \varnothing$	$c = 5$	$1001a + 100b = 626 \quad \varnothing$
$c = 1$	$1001a + 100b = 26 \quad \varnothing$	$c = 6$	$1001a + 100b = 901 \quad \varnothing$
$c = 2$	$1001a + 100b = 101 \quad \varnothing$	$c = 7$	$1001a + 100b = 1226,\ a = 1,\ b = \varnothing$
$c = 3$	$1001a + 100b = 226 \quad \varnothing$	$c = 8$	$1001a + 100b = 1 \quad a = 1,\ b = 6$
$c = 4$	$1001a + 100b = 401 \quad \varnothing$	$c = 9$	$1001a + 100b = 1 \quad a = 1,\ b = \varnothing$

Ответ: 1681.

Задача №2. Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 21. Определите число сторон многоугольника.

Решение: Пусть x — число сторон, а значит и вершин многоугольника. Из каждой вершины можно провести $(x-3)$ диагоналей, из всех его вершин — в x раз больше, но одна и та же диагональ будет принадлежать 2 вершинам. Поэтому общее число диагоналей $\frac{x(x-3)}{2}$. По условию имеем $\frac{x(x-3)}{2} + x = 21 \Rightarrow x^2 - x - 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$ $x_2 = -3$.

Ответ: 7.

Задача №3. Записать в виде степени число $26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2^{2021}$.

Решение: $26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2^{2021} = 26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2 \cdot 2^{2020} = 32 \cdot 2^{2020} = 2^{2025}$ (или $26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2^{2021} = 13 \cdot 2^{2021} + 3 \cdot 2^{2021} = 16 \cdot 2^{2021} = 2^{2025}$).

Ответ: 2^{2025}.

Задача №4. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019\cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

Решение: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2021}\right] < \frac{1}{2}$.

Задача №5. Дан пример на сложение двух трехзначных чисел:

$$\begin{array}{cccc} & a & 4 & c \\ + & d & 5 & f \\ \hline g & h & 0 & 2 \end{array}$$

Каждой букве соответствует одна единственная цифра. Разным буквам соответствуют разные цифры. Никакая цифра в примере не повторяется. Какой букве какая цифра соответствует? Приведите хотя бы один конкретный пример.

Решение: Сумма двух самых больших трехзначных чисел $999+999$ дает четырехзначное число 1998, поэтому $g = 1$.

Видим, что в разряде десятков $4+5 = 9$, но под ними стоит 0, значит сумма цифр в разряде единиц $c + f$ не 2, а 12. Число 12 можно получить, например, складывая 3 и 9. Пусть $c = 3$ и $f = 9$. Итак, имеем:

$$
\begin{array}{cccc}
 & a & 4 & 3 \\
+ & d & 5 & 9 \\
\hline
1 & h & 0 & 2
\end{array}
$$

Далее, в разряде десятков, под чертой суммы стоит 0, но $5+4 = 9$ и 10 получается за счет числа 12 в результате сложения разрядов единиц, поэтому $10 + h = a + d + 1$.

Так как цифры в примере не повторяются, и мы уже использовали 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, то из оставшихся цифр: 6, 7, 8 нужно подобрать какое-нибудь решение уравнения $10 + h = a + d + 1$. Например, $a = 7$, $d = 8$, $h = 6$.

В итоге имеем

$$
\begin{array}{cccc}
 & 7 & 4 & 3 \\
+ & 8 & 5 & 9 \\
\hline
1 & 6 & 0 & 2
\end{array}
$$

Задача №6. Дедушка с внуком одновременно пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час, под гору — дедушка 8 км/час, внук — 20 км/час, в гору — дедушка 6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, если первым вернулся а) внук; б) дед?

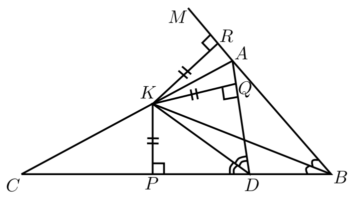
Решение: Пусть S_1 — протяженность подъемов, S_2 — ровного места, S_3 — спусков. Тогда время, затраченное на маршрут дедом: $T = \frac{S_1}{6} + \frac{S_2}{7} + \frac{S_3}{8}$, а внуком $t = \frac{S_1}{4} + \frac{S_2}{7} + \frac{S_3}{20}$.

а) $t < T \Rightarrow S_1 < \frac{9S_3}{10} < S_3 \Rightarrow S_1 < S_3$ — протяженность подъемов меньше, чем спусков.

б) $t > T \Rightarrow S_1 > \frac{9S_3}{10}$, из множителя $\frac{9}{10}$ определить, $S_1 > S_3$ или $S_3 > S_1$ нельзя.

Ответ: а) подъемов меньше, чем спусков; б) определить нельзя.

Задача №7. Пусть BK — биссектриса в треугольнике $\triangle ABC$, точка D лежит на стороне BC так, что $\angle DAC = \angle B + \angle C$. Доказать, что DK — биссектриса угла $\angle ADC$.



Решение: Пусть $\angle CAM$ — внешний угол треугольника $\triangle ABC$ при вершине A. Он равен сумме $\angle B + \angle C$. Тогда AC — биссектриса $\angle DAM$. Значит, расстояния от любой точки, лежащий на AC, в том числе и от точки K, до сторон AD и AM угла $\angle DAM$ равны. Тогда равны расстояния от точки K до сторон DC и AD угла $\angle ADC$. Значит, точка K лежит на биссектрисе $\angle ADC$, т.е. DK — биссектриса $\angle ADC$.

Задача №8. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость? Приведите последовательность взвешиваний.

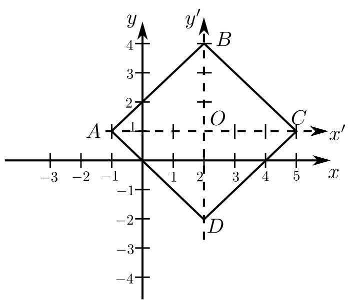
Решение:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1 г	2 г	4 г	8 г	16 г	32 г	63 г	126 г	253 г	505 г	1011 г
1 г	1+1 г	1+3 г	1+7 г	1+15 г	1+31 г	63 г	126 г	1+252 г	505 г	1+1010 г

Сумма по всем граммам сахара 1+2+4+8+16+32+63+126+253+505+1011 = 2021.

Задача №9. На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле: $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(2, 1)$ и радиусом $R = 3$ и найти длину этой окружности.

Решение:



Окружность — геометрическое место точек, равноудаленных от центра. В нашем случае уравнение окружности запишется в виде $|x - 2| + |y - 1| = 3$, где $O(2, 1)$ — центр окружности. Введем новую систему координат с началом в точке O $(x'Oy')$. В этой системе координат уравнение окружности примет вид $|x'| + |y'| = 3$. График — ромб $ABCD$ (см. рис.). Длина окружности $4 \cdot |AB|$, где длина $|AB| = |3| + |3| = 6$ (в новой системе координат) или $|AB| = |2 - (-1)| + |4 - 1| = |3| + |3| = 6$ в старой системе. Поэтому длина окружности равна 24.

Ответ: 24.

Задача №10. Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путем расстановки знаков «+» и «−» между числами $1, 2, 3, \ldots, 2020, 2021$?

Решение: Рассмотрим любую четверку чисел $n, n+1, n+2, n+3$ и расставим знаки следующим образом: $n - (n+1) - (n+2) + (n+3) = 0$. Расставим таким образом знаки в четверках $(2, 3, 4, 5)$, $(6, 7, 8, 9)$, $\ldots$, $(2018, 2019, 2020, 2021)$, внутри которых знаки как указано выше, а между четверками знак «+». Тогда их сумма равна нулю. Осталось после 1 поставить любой знак и в сумме получим единицу.

Ответ: 1.