XXIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2021»

Заключительный тур

14 февраля 2021 года

11 класс

2 вариант

▷ **1.** Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64.

▷ **2.** На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x)=2020ax^2-2020ax+1$, относительно которых известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение параметра a.

▷ **3.** Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{(2\cdot 2021-1)}{2^{2021}}<3.$$

▷ **4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1}+3^{3x}=4^y+3^{3y}-3,\\ 2^{y+1}+3^{3y}=4^x+3^{3x}-3.\end{cases}$$

▷ **5.** Вычислить $y=\underbrace{f(f(f(\dots(f}_{2021\text{ раз}}(\sin x)\dots))$, если $f(\sin x)=\cos x$.

▷ **6.** Решите уравнение: $2\cdot\cos(2\cdot 2021^x)-3\cdot\cos(2021^x)+1=0$.

▷ **7.** Числовая последовательность x_n для всех номеров $n\ge m\ge 0$ удовлетворяет условию $x_{n+m}+x_{n-m}=\frac{1}{2}(x_{2n}+x_{2m})$. Доказать, что при всех $n\ge m\ge 0$ справедливо равенство $x_{n+m}\cdot x_{n-m}=(x_n-x_m)^2$.

▷ **8.** В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AC в точке P. Могут ли оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABP, вторая — в треугольник BPC, одновременно лежать на окружности, вписанной в треугольник ABC? Ответ объясните.

▷ **9.** На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — меньшего радиуса. Жидкость при этом не вылилась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения $\frac{R}{r}$ можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром меньшего радиуса?

▷ **10.** Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-4y+18x-26>0,\\ y^3+x^2-4y-8x+14<0.\end{cases}$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2021»

Заключительный тур

14 февраля 2021 года

11 класс

2 вариант

▷ **1.** Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{(2\cdot 2021-1)}{2^{2021}}<3.$$

▷ **2.** На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x)=2020ax^2-2020ax+1$, относительно которых известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение параметра a.

▷ **3.** Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-4y+18x-26>0,\\ y^3+x^2-4y-8x+14<0.\end{cases}$$

▷ **4.** Решите уравнение: $2\cdot\cos(2\cdot 2021^x)-3\cdot\cos(2021^x)+1=0$.

▷ **5.** В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AC в точке P. Могут ли оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABP, вторая — в треугольник BPC, одновременно лежать на окружности, вписанной в треугольник ABC? Ответ объясните.

▷ **6.** Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64.

▷ **7.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1}+3^{3x}=4^y+3^{3y}-3,\\ 2^{y+1}+3^{3y}=4^x+3^{3x}-3.\end{cases}$$

▷ **8.** Вычислить $y=\underbrace{f(f(f(\dots(f}_{2021\text{ раз}}(\sin x)\dots))$, если $f(\sin x)=\cos x$.

▷ **9.** Числовая последовательность x_n для всех номеров $n\ge m\ge 0$ удовлетворяет условию $x_{n+m}+x_{n-m}=\frac{1}{2}(x_{2n}+x_{2m})$. Доказать, что при всех $n\ge m\ge 0$ справедливо равенство $x_{n+m}\cdot x_{n-m}=(x_n-x_m)^2$.

▷ **10.** На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — меньшего радиуса. Жидкость при этом не вылилась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения $\frac{R}{r}$ можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром меньшего радиуса?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!