САММАТ-2021
Решение задач 9 класса
2 вариант

Задача №1. В некотором выпуклом 2021-угольнике провели все диагонали. Оказалось, что если какие-то две диагонали пересекаются в некоторой точке, отличной от вершин многоугольника, то никакая другая диагональ не проходит через эту точку. Найти число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин многоугольника.

Решение: Выберем любые четыре вершины выпуклого 2021-угольника, тогда они определяют одну точку пересечения диагоналей, отличную от вершин многоугольника. Значит, число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин многоугольника равно числу способов выбрать четыре различных вершины из 2021 вершины многоугольника, т.е. равно $C_{2021}^4 = \frac{2021\cdot 2020\cdot 2019\cdot 2018}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 693048969485$.

Ответ: 693048969485.

Задача №2. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{2021^2}<1.$$

Решение: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{2021^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{2020\cdot 2021}=$
$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\dots+\frac{2021-2020}{2020\cdot 2021}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2021}=1-\frac{1}{2021}<1.$

Задача №3. На какое максимальное число можно сократить дробь $\frac{20202021}{20212020}$?

Решение: Сумма цифр числителя и знаменателя делится на 9, поэтому дробь сразу можно сократить на 9. Получим: $\frac{2244669}{22455780}$.

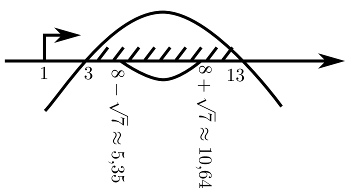
Разность знаменателя и числителя равна $1111 = 101\cdot 11$, где 101 и 11 — простые числа. Поэтому НОД$(2244669; 22455780) =$ НОД$(2244669; 1111)$.

Но 2244669 не делится ни на 101, ни на 11. Поэтому дробь можно сократить только на 9.

Ответ: дробь можно сократить только на 9.

Задача №4. Найти все целые решения неравенства

$$\sqrt{\frac{16x-39-x^2}{18}}\le\frac{16x-36-x^2}{18}.$$



Решение: ОДЗ: $\frac{16x-39-x^2}{18}\ge 0 \Rightarrow x_{1,2}=8\pm\sqrt{64-39}$
$\Rightarrow x_1=3,\ x_2=13$ — являются решениями $\Rightarrow x\in[3;13]$
$\sqrt{\frac{16x-39-x^2}{18}}\le\frac{16x-36-x^2}{18}\Rightarrow a\le a^2,\ a\ge 0$
$a\le a^2\Rightarrow a(a-1)\ge 0$
$\frac{16x-39-x^2}{18}\ge 1\Rightarrow x^2-16x+57\le 0\Rightarrow x_{1,2}=8\pm\sqrt{7}$
Ответ: 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13.

Задача №5. Известно, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни. Имеет ли квадратный трехчлен $a^5x^2+b^5x+c^5$ действительные корни? Ответ объясните.

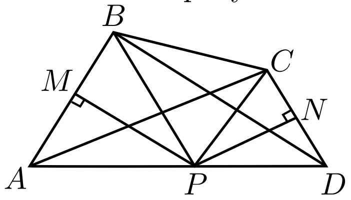
Решение: Так как квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни, то $b^2 \geq 4ac \Rightarrow b^{10} \geq 4^5a^5c^5$. Рассмотрим 2 случая:

1) если $ac < 0$, то $b^{10} \geq 0 > 4a^5c^5 \Rightarrow b^{10} \geq 4a^5c^5 \Rightarrow a^5x^2+b^5x+c^5$ имеет действительные корни;

2) если $ac \geq 0$, то $4^5a^5c^5 \geq 4a^5c^5 \Rightarrow b^{10} \geq 4a^5c^5 \Rightarrow a^5x^2+b^5x+c^5$ имеет действительные корни.

Ответ: да.

Задача №6. В четырехугольнике $ABCD$ серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD и $\angle BAD = \angle ADC$. Может ли одна диагональ четырехугольника быть больше другой? Ответ объясните.



Решение: Пусть точка P — точка пересечения серединных перпендикуляров PM и PN. Тогда $AP = BP$, $CP = DP \Rightarrow \angle PAB = \angle ABP = \angle PDC = \angle PCD \Rightarrow \angle APB = \angle CPD \Rightarrow \angle APC = \angle BPD \Rightarrow \triangle APC = \triangle BPD$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AC = BD$.

Ответ: нет.

Задача №7. Найдите пары натуральных чисел m и n, для которых выполняется равенство:

$$\text{НОК}(m,n) - 2\text{НОД}(m,n) = \frac{5mn}{7}.$$

Решение: Как известно, $\text{НОК}(m,n) \cdot \text{НОД}(m,n) = mn$. Для удобства введем обозначения: $\text{НОК}(m,n) = x$, $\text{НОД}(m,n) = y$, така как $m, n \in \mathbb{N}$, то $x, y \in \mathbb{N}$.

Исходное уравнение примет вид: $(x-2y) = \frac{5xy}{7} \Rightarrow 7(x-2y) = 5xy \Rightarrow 7x-14y-5xy = 0 \Rightarrow x(7-5y)-14y = 0 \Rightarrow x(7-5y) - \frac{14}{5}\cdot 5y = 0 \Rightarrow x(7-5y) - \frac{14}{5}\cdot(5y-7+7) = 0 \Rightarrow x(7-5y) - \frac{14}{5}\cdot(5y-7) - \frac{14}{5}\cdot 7 = 0 \Rightarrow (7-5y)\left(x+\frac{14}{5}\right) = \frac{14\cdot 7}{5} \Rightarrow (7-5y)(5x+14) = 14\cdot 7$.

$x, y \in \mathbb{N}$, следовательно, $5x+14 \in \mathbb{N}$ и, значит, $7-5y \in \mathbb{N}$. Поскольку $y \in \mathbb{N}$, то это возможно лишь при $y = 1$.

В таком случае, $2\cdot(5x+14) = 14\cdot 7 \Rightarrow 5x+14 = 49 \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = 7$. Следовательно, $\text{НОК}(m,n) = 7$, $\text{НОД}(m,n) = 1$. Что означает, что числа взаимно простые и возможны две ситуации: $m = 1, n = 7$ или $m = 7, n = 1$.

Ответ: $m = 1, n = 7$ или $m = 7, n = 1$.

Задача №8. Решите уравнение: $\left(\frac{3}{25}x\right)^3 = b$, где b — среднее арифметическое чисел
$m = \dfrac{276^2+276\cdot 243+243^2}{529}$, $n = \dfrac{276^2-276\cdot 243+243^2}{23}$.

Решение:

$$m = \frac{276^2+276\cdot 243+243^2}{529} = \frac{276^2+276\cdot 243+243^2}{276+243} =$$
$$= \frac{(276-243)(276^2+276\cdot 243+243^2)}{(276-243)(276+243)} = \frac{276^3-243^3}{23\cdot 529} = \frac{276^3-243^3}{23\cdot 23^2} = \frac{276^3-243^3}{23^3};$$

$$n=\frac{276^2-276\cdot 243+243^2}{23}=\frac{276^2-276\cdot 243+243^2}{276-243}=$$
$$=\frac{(276+243)(276^2-276\cdot 243+243^2)}{(276+243)(276-243)}=\frac{276^3+243^3}{529\cdot 23}=\frac{276^3+243^3}{23^2\cdot 23}=\frac{276^3+243^3}{23^3};$$
$$b=\frac{m+n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{276^3-243^3}{23^3}+\frac{276^3+243^3}{23^3}\right)=\frac{276^3}{23^3}=\left(\frac{276}{23}\right)^3=12^3;$$
$\left(\dfrac{3}{25}x\right)^3=12^3$, $\frac{3}{25}x=12$, $x=12\cdot\frac{25}{3}=4\cdot 25=100$.

Ответ: 100.

Задача №9. Из всех решений уравнения $y^2x-y^2+4xy+6x-2y=3$ найдите те решения, для которых x принимает наименьшее значение.

Решение:
$$(x-1)y^2+2(2x-1)y+3(2x-1)=0. \qquad (1)$$
1) $x=1\Rightarrow y=-1{,}5$.

2) $x\neq 1\Rightarrow \frac{D}{4}=(2x-1)^2-3(x-1)(2x-1)=(2x-1)(2-x)\geq 0\Rightarrow x\in[0{,}5;2]\Rightarrow x_{\text{наим}}=0{,}5<x=1$ (в первом случае).

Подставив $x=0{,}5$ в (1), получим $y=0$.

Ответ: $(0{,}5;0)$.

Задача №10. Для любой пары чисел определена некоторая операция «$*$», удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$, где операция «$\cdot$» — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x*2=2021$.

Решение: Учитывая условие задачи, имеем $x*1=x*(x*x)=(x*x)\cdot x=1\cdot x=x$. Тогда

1) $(x*2)\cdot 2=2021\cdot 2=4042$,

2) $(x*2)\cdot 2=x*(2*2)=x\cdot 1=x$.

Следовательно, $x=4042$.

Ответ: 4042.