САММАТ-2021
Решение задач 8 класса
2 вариант

Задача №1. Доказать, что каждое число вида $n^4 + 64$ является составным при всех натуральных $n > 2$.

Решение: $n^4+64 = n^4+16n^2-16n^2+64 = (n^2+8)^2-16n^2 = (n^2+8+4n)(n^2+8-4n) = [(n+2)^2+4][(n-2)^2+4]$. При $n > 2$ $(n+2)^2+4 \neq 1$, $(n-2)^2+4 \neq 1$. Таким образом, $n^2 + 64$ имеет два различных делителя, отличных от него самого и единицы.

Задача №2. Вычислить $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + (a-1)x + 3 + a - 4a^2 = 0.$$

При каких a это уравнение имеет решение?

Решение: Найдем

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{9a^2-4a-5}{(3+a-4a^2)^2}.$$

Уравнение имеет действительные решения при $D = 17a^2 - 6a - 11 \geq 0$, то есть при $a \in \left(-\infty; -\frac{11}{17}\right] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $\frac{9a^2-4a-5}{(3+a-4a^2)^2}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{11}{17}\right] \cup [1; +\infty)$.

Задача №3. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2019\cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

Решение: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2}{2019\cdot 2021}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{2021-2019}{2019\cdot 2021}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{2021}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2020}{2021} < \frac{1}{2}$.

Задача №4. На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x) = 2020x^2 + px + q$, для которых значения параметров p и q удовлетворяют условию $p + q = 2021$. Пересекаются ли эти параболы в одной точке координатной плоскости? Ответ объясните.

Решение: $f(1) = 2020\cdot 1^2 + p\cdot 1 + q = 2020 + p + q = 2020 + 2021 = 4041$. Все параболы проходят через точку $(1; 4041)$.

Ответ: да.

Задача №5. Решите уравнение $x^2 + x^{10} = 2x^{12}$. Ответ обосновать.

Решение: Очевидно, что корнями являются $0, 1, -1$. Покажем, что корней, кроме $0, 1$ и -1, нет. При $x^2 > 1$, $x^{12} > x^2$, $x^{12} > x^{10}$, а если $x^2 < 1$, то $x^{12} < x^2$, $x^{12} < x^{10}$.

Ответ: $0, 1, -1$.

Задача №6. Миша, Петя и Коля одновременно стартовали в зачете на 150 метров. Когда Миша финишировал, Петя находился в 20 метрах позади него, а когда финишировал Петя — Коля находился позади него в 15 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Миша и Коля, когда Миша финишировал? Предполагается, что скорости мальчиков постоянны и различны.

Решение: Составим таблицу

	v	t	S
М	x	$\frac{150}{x}$	150
П	y	$\frac{150}{x}$	130
П	y	$\frac{150}{y}$	150
К	z	$\frac{150}{y}$	135
К	z	$\frac{150}{z}$	$\frac{z}{x}150$

$150-\frac{z}{x}150=?$

$\frac{150y}{x}=130 \Rightarrow y=\frac{130x}{150}$. $\frac{z\cdot 150}{y}=135 \Rightarrow \frac{z\cdot 150}{130x}\cdot 150=135$. $\frac{z\cdot 150}{x}=\frac{135\cdot 130}{150}=117$. $150-117=33$ м.

Ответ: 33 метра.

Задача №7. Решите в целых числах уравнение $3x^2+5xy+2y^2+8x+5y=7$.

Решение: $(x+y+3)(3x+2y-1)=4$.

$\begin{cases} x+y+3=4, \\ 3x+2y-1=1, \end{cases} \Rightarrow (0;1).$ $\begin{cases} x+y+3=2, \\ 3x+2y-1=2, \end{cases} \Rightarrow (5;-6).$

$\begin{cases} x+y+3=1, \\ 3x+2y-1=4, \end{cases} \Rightarrow (9;-11).$ $\begin{cases} x+y+3=-4, \\ 3x+2y-1=-1, \end{cases} \Rightarrow (14;-21).$

$\begin{cases} x+y+3=-2, \\ 3x+2y-1=-2, \end{cases} \Rightarrow (9;-14).$ $\begin{cases} x+y+3=-1, \\ 3x+2y-1=-4, \end{cases} \Rightarrow (5;-9).$

Ответ: $(0;1)$, $(5;-6)$, $(9;-11)$, $(14;-21)$, $(9;-14)$, $(5;-9)$.

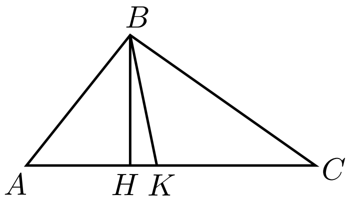
Задача №8. На Юпитере 2020 стран, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможное количество стран, которые враждуют сразу со всеми.

Решение: Найдем максимальное количество стран, воюющих не со всеми, то есть стран, которые не воюют хотя бы с одной из других 2019 (назовем их мирными). Допустим, страна A находится в мире со страной B. Заметим, что если бы существовала страна C, не воюющая с какой-либо страной D, то для четверки A, B, C, D не выполнялось бы условие задачи. Следовательно, если существует еще одна мирная страна C, то она находится в мире либо с A, либо с B, либо и с A, и с B. Очевидно, что четвертой мирной страны X не существует (если она не воюет хотя бы с одной из стран A, B или C, то для A, B, C, X не выполняется условие задачи, а случай, в котором она не воюет с какой-либо страной D, уже был исключен выше). Значит, наименьшее количество стран, воюющих со всеми — 2017.

Ответ: 2017.

Задача №9. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена биссектриса и высота. Может ли проведенная биссектриса быть больше в два раза проведенной высоты? Ответ объясните.

Решение:



Пусть BH — высота, BK — биссектриса. Допустим, что $BK = 2BH$, тогда $\angle BKH = 30^\circ \Rightarrow \angle HBK = 60^\circ \Rightarrow \angle ABK > 60^\circ \Rightarrow \angle ABC = 2\angle ABK > 120^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ — тупоугольный.

Ответ: нет.

Задача №10. Дядя Ваня решил в своем саду посадить в один ряд 10 деревьев — вишни и яблони. Сможет ли он посадить их так, чтобы между каждыми двумя вишнями оказалось четное число деревьев, а между каждыми двумя яблонями — нечетное число деревьев? Ответ объясните.

Решение: Пронумеруем места для посадки деревьев, таким образом, получим места с четными и нечетными номерами. Если какую-то яблоню посадить на место с нечетным номером, а другую на место с четным номером, то между ними будет четное число деревьев, следовательно, либо четные места, либо нечетные должны быть свободны от яблонь. Но если на четных местах, либо нечетных местах, посадить только вишни, то между любой парой вишен будет нечетное число деревьев, следовательно, приходим к выводу, что посадить таким образом вишни и яблони невозможно.

Ответ: не сможет.