САММАТ-2021
Решение задач 11 класса
2 вариант

Задача №1. Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64.

Решение: Докажем методом математической индукции.

Во-первых, $3^{2k}-1=9^k-1$ делится на 8 при $\forall k \in \mathbb{N}$. Доказывается также методом математической индукции. Действительно 9^k-1 при $n=1$ делится на 8. Пусть 9^k-1 делится на 8 при произвольном k. Рассмотрим $9^{k+1}-1=9^k\cdot 9-1=9^k\cdot 8+9^k-1=8\cdot 9^k+(9^k-1)$, оба слагаемых делятся на 8.

Рассмотрим основное выражение $3^{2n+3}+40n-27=27\cdot 3^{2n}-27+40n=27(9^n-1)+40n$, при $n=1$ выполняется деление на 64. Пусть это выражение делится на 64 при $\forall n>1$. Рассмотрим это выражение при $(n+1)$. Имеем $27(9^{n+1}-1)+40(n+1)=27(9^n\cdot(8+1)-1)+40n+40=27(9^n-1)+27\cdot 8\cdot 9^n+40n+40=[27(9^n-1)+40n]+216\cdot 9^n+40n=[27(9^n-1)+40n]+[216(9^n-1)]+256$. Каждое из трех слагаемых делится на 64, первое — по предположению, второе — потому что 216 и 9^n-1 делятся на 8 каждое и 256 делится на 64. Утверждение доказано.

Задача №2. На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x)=2020ax^2-2020ax+1$, относительно которых известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение параметра a.

Решение: Так как $f(0)=f(1)=1$, то график симметричен относительно прямой $x=0{,}5$. Тогда $f(0{,}5)=1-\frac{2020a}{4}$. Учитывая, что $|f(x)|\le 1$, приходим к выводу, что наибольшее возможное значение параметра a достигается при

$$f(0{,}5)=1-\frac{2020a}{4}=-1 \;\Rightarrow\; \frac{2020a}{4}=2 \;\Rightarrow\; 2020a=8 \;\Rightarrow\; a=\frac{2}{505}.$$

Ответ: $\frac{2}{505}$.

Задача №3. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2021}}<3.$$

Решение:
$\left.\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2021}} \\ \frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\dots+\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2022}}\end{array}\right\}- \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\dots-\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2022}}$,

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{2021}}-\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2022}},$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2022}},$$

$$S=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}-\frac{2\cdot 2021-1}{2^{2022}}<3.$$

Задача №4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{3x} = 4^y + 3^{3y} - 3, \\ 2^{y+1} + 3^{3y} = 4^x + 3^{3x} - 3. \end{cases}$$

Решение: Обозначим через $g(x)$ левую часть первого уравнения системы, а через $h(x)$ — правую часть второго уравнения системы. Сложив левую часть первого уравнения с правой частью второго уравнения и правую часть первого уравнения с левой частью второго уравнения, получим

$$g(x) + h(x) = g(y) + h(y).$$

Функция $g(x) + h(x)$ — строго возрастающая, поэтому $x = y$ и решение заданной системы сводится к решению уравнения $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ и после обозначения $2^x = t$ получаем $t_1 = -2$, $t_2 = 3 \Rightarrow x = y = \log_2 3$.

Ответ: $x = y = \log_2 3$.

Задача №5. Вычислить $y = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{2021\text{ раз}}(\sin x)\ldots))$, если $f(\sin x) = \cos x$.

Решение:

$$f(\sin x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(f(\sin x)) = f\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(f(f(\sin x))) = f\left(\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ldots$$
$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{2021}(\sin x)\ldots)) = \sin\left(x + \frac{2021\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

Ответ: $\cos x$.

Задача №6. Решите уравнение: $2 \cdot \cos(2 \cdot 2021^x) - 3 \cdot \cos(2021^x) + 1 = 0$.

Решение: Пусть $t = 2021^x$, $t > 0$. Тогда

$$2 \cdot \cos(2t) - 3 \cdot \cos(t) + 1 = 0,$$
$$4\cos^2 t - 3 \cdot \cos(t) - 1 = 0.$$

1) $\cos t = 1 \Rightarrow t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, чтобы $t > 0 \Rightarrow x = \log_{2021}(2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $\cos t = -0{,}25 \Rightarrow \begin{array}{l} t = \arccos(-0{,}25), \\ t = \pm\arccos(-0{,}25) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ \text{чтобы } t > 0 \end{array} \Rightarrow$

$x = \log_{2021}(\arccos(-0{,}25))$,
$t = \log_{2021}(\pm\arccos(-0{,}25) + 2\pi n),\ n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $\log_{2021}(\arccos(-0{,}25)), \log_{2021}(2\pi n), \log_{2021}(\pm\arccos(-0{,}25) + 2\pi n),\ n \in \mathbb{N}$.

Задача №7. Числовая последовательность x_n для всех номеров $n \geq m \geq 0$ удовлетворяет условию $x_{n+m} + x_{n-m} = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2m})$. Доказать, что при всех $n \geq m \geq 0$ справедливо равенство $x_{n+m} \cdot x_{n-m} = (x_n - x_m)^2$.

Решение: Положим в равенстве $n = m = 0$, тогда $x_0 + x_0 = \frac{1}{2}(x_0 + x_0)$, откуда находим $x_0 = 0$.

Пусть в равенстве $m = 0$, тогда $x_n + x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_0)$ откуда находим $x_{2n} = 4x_n = 2^2 x_n$. Например, $x_2 = 4x_1 = 2^2 x_1$ и $x_4 = 4x_2 = 16x_1 = 4^2 x_1$. Но тогда для всех $n = 2^k$ будет справедливо равенство $x_{2^k} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{k \text{ штук}} \cdot x_1 = 2^{2k} x_1$.

Положим в равенстве $n = 2$ и $m = 1$, тогда $x_3 + x_1 = \frac{1}{2}(x_4 + x_2) = 8x_1 + x_1 = 9x_1 = 3^2 x_1$.

Таким образом, замечаем, что для всех $n = 1, 2, 3, 4$ и всех $n = 2^k$ справедливо равенство $x_n = n^2 x_1$.

Покажем, что равенство $x_n = n^2 x_1$ справедливо при любом $n \geq 0$.

Действительно, пусть равенство верно при всех $n = 1, 2, 3, \ldots, k$. Покажем, что равенство верно при $n = k + 1$.

Положим в исходном условии $n = k$ и $m = 1$, тогда

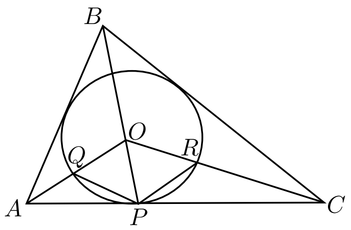
$$x_{k+1} + x_{k-1} = \frac{1}{2}(x_{2k} + x_2) = 2x_k + 2x_1,$$
$$x_{k+1} = -x_{k-1} + 2x_k + 2x_1 = -(k-1)^2 x_1 + 2k^2 x_1 + 2x_1 =$$
$$= (-k^2 + 2k - 1 + 2k^2 + 2)x_1 = (k^2 + 2k + 1)x_1 = (k+1)^2 x_1.$$

Тогда в искомом равенстве получим

$$x_{n+m} + x_{n-m} = (n+m)^2 x_1 \cdot (n-m)^2 x_1 = ((n+m) \cdot (n-m))^2 (x_1)^2 =$$
$$= (n^2 - m^2)^2 (x_1)^2 = (n^2 x_1 - m^2 x_1)^2 = (x_n - x_m)^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача №8. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AC в точке P. Могут ли оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABP, вторая — в треугольник BPC, одновременно лежать на окружности, вписанной в треугольник ABC? Ответ объясните.



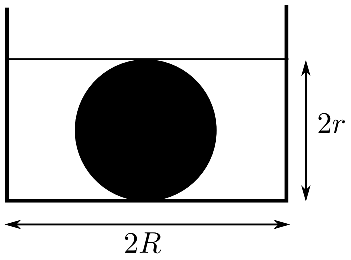
Решение: От противного. Предположим, что центры Q и R лежат на окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда AO, AQ, CO, CR, PQ, PR — биссектрисы соответствующих углов $\Rightarrow$ точки Q и R лежат на AO и CO. Далее имеем $\angle QPR = \angle QPO + \angle OPR = \frac{1}{2}\angle APO + \frac{1}{2}\angle CPO = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \Rightarrow QR$ — диаметр $\Rightarrow$ точка $O \in QR \Rightarrow$ точки A, Q, O, R, C лежат на одной прямой $\Rightarrow$ пришли к противоречию.

Ответ: нет.

Задача №9. На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — меньшего радиуса. Жидкость при этом не вылилась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения $\frac{R}{r}$ можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром меньшего радиуса?

Решение: Объем жидкости в сосуде равен $\pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3$. Обозначим радиус второго шара ρ, тогда объем жидкости не изменится:

$$\pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 \cdot 2\rho - \frac{4}{3}\pi \rho^3.$$



Из этого уравнения найдем ρ. разделив части на 2π и записав в виде $\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{2}{3}r^3 = R^2(\rho - r)$. Тогда $\frac{2}{3}(\rho - r)(\rho^2 + r\rho + r^2) = R^2(\rho - r)$, а так как $\rho - r > 0$, то $\rho^2 + r\rho + r^2 - \frac{3}{2}R^2 = 0$.

Отсюда $\rho = \frac{\sqrt{6R^2 - 3r^2} - r}{2}$. Но $\rho \le R$, поэтому, решив неравенство $\rho = \frac{\sqrt{6R^2 - 3r^2} - r}{2} \le r$ относительно R и учитывая, что $R > r$, получим: $r \le R < \sqrt{2}r$, откуда $1 \le \frac{R}{r} < \sqrt{2}$.

Ответ: $1 \le \frac{R}{r} < \sqrt{2}$.

Задача №10. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

Решение: Умножим первое неравенство на (-1), сложим и получим

$$4x^2 - 26x + 40 < 0 \ \Rightarrow\ 2x^2 - 13x + 20 < 0 \ \Rightarrow\ (D = 9)\ x \in (2{,}5; 4).$$

Единственное целое значение x, удовлетворяющее неравенству, $x = 3$.

Подставим $x = 3$ в исходную систему

$$\begin{cases} y^3 - 27 - 4y + 54 - 26 > 0, \\ y^3 + 9 - 4y - 24 + 14 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 - 4y + 1 > 0, \\ y^3 - 4y - 1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 > 4y - 1, \\ y^3 < 4y + 1. \end{cases}$$

Двойному неравенству удовлетворяют только три целых значения y: $0, -2, 2$. Сделав проверку, получим, что система имеет три целых решения: $(3; 0)$, $(3; 2)$, $(3; -2)$.

Ответ: $(3; 0)$, $(3; 2)$, $(3; -2)$.