САММАТ-2024
Решение задач 9 класса

Задача №1. Сравните значения выражений в зависимости от параметра t ($t \in \mathbb{R}$): $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots+\sqrt{30+\frac{1}{t^2+4t+\frac{163}{39}}}}}}$ и $\sqrt{37\left(1+\frac{|t|}{1+t^2}\right)}$.

Решение: $\dfrac{1}{t^2+4t+\frac{163}{39}}=\dfrac{1}{t^2+4t+4+\frac{7}{39}}=\dfrac{1}{(t+2)^2+\frac{7}{39}}\leq\dfrac{39}{7}<6$ $\forall t$ поскольку максимальное значение достигается при $t=-2$.

$\dfrac{|t|}{1+t^2}>0$ для любых t, поэтому $\sqrt{37\left(1+\dfrac{|t|}{1+t^2}\right)}>\sqrt{37}>6$.

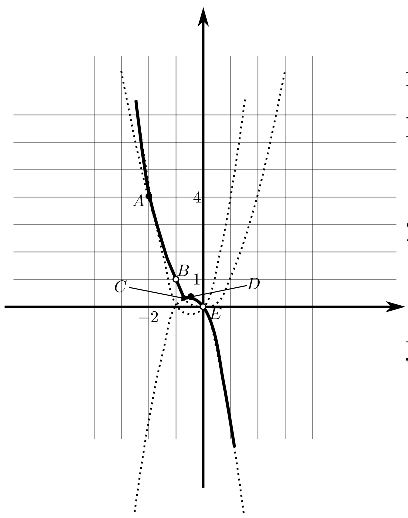
Тогда имеем оценки:

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots+\sqrt{30+\frac{1}{t^2+4t+\frac{163}{39}}}}}}<$$

$$<\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots+\sqrt{30+6}}}}<6<\sqrt{37}<\sqrt{37\left(1+\frac{|t|}{1+t^2}\right)}.$$

Ответ: Значения первого выражения меньше значения второго выражения при любых значениях t.

Задача №2. Постройте график функции $y=\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}$. С помощью построенного графика определите, при каких значениях параметра k уравнение $\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}=k$ имеет нечетное количество различных решений.



Решение: Подмодульные выражения обращаются в ноль в точках $x=-2$ и $x=-\dfrac{2}{3}$. Имеем три случая раскрытия модулей:

1) если $x<-2$, то $y=\dfrac{4x^2(x+1)}{2x}=2x(x+1)=2x^2+2x$;

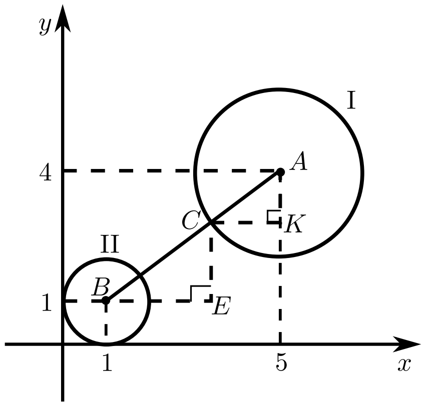
2) если $-2\leq x\leq -\dfrac{2}{3}$, то $y=\dfrac{4x^2(x+1)}{4(x+1)}=x^2$ при условии $x\neq -1$;

3) если $x>-\dfrac{2}{3}$, то $y=\dfrac{4x^2(x+1)}{-2x}=-2x(x+1)=-2x^2-2x$ при условии $x\neq 0$.

Построив на каждом промежутке соответствующие параболы, получим график искомой функции. Видно, что прямые $y=k$, параллельные оси абсцисс, пересекают его в одной точке, когда они проходят ниже точки $C\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$ или выше точки $D\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и при этом не проходит через точки $E(0;0)$ и $B(-1;1)$. А в трех точках они пересекают график между точками $C\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$ и $D\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $k\neq 0$, $k\neq\frac{4}{9}$, $k\neq\frac{1}{2}$, $k\neq 1$.

Задача №3. Какая точка на кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-8y-10x+37=0$, ближе всего (находится на наименьшем расстоянии) к кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-2x-2y+1=0$?



Решение: Выделим полные квадраты по переменным x и y в каждом уравнении:
(I): $y^2-8y+16-16+x^2-10x+25-25+37=0$ $\Rightarrow (y-4)^2+(x-5)^2=4$;
(II): $y^2-2y+1-1+x^2-2x+1-1+1=0\Rightarrow$ $(y-1)^2+(x-1)^2=1$.

Получили, что обе кривые являются окружностями: (I) — окружность радиуса $r=2$ с центром в точке $x=5, y=4$; (II) — окружность радиуса $r=1$ с центром $x=1, y=1$.

Наименьшее расстояние до второй кривой имеет точка C, лежащая на прямой, соединяющей центры $A(5,4)$ и $B(1,1)$ окружностей. Найдем расстояние $|AB|=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=5$. Тогда $|BC|=5-2=3$. Рассмотрим два прямоугольных подобных треугольника ACK и BCE (см. рис.). Имеем $|AC|=2$, $|BC|=3$, $|AK|=4-y$, $|CE|=y-1$, $|CK|=5-x$, $|BE|=x-1$, где $C(x,y)$. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{2}{3}=\frac{4-y}{y-1}=\frac{5-x}{x-1}\Rightarrow$$

$$\frac{4-y}{y-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(4-y)=2(y-1)\Rightarrow 12-3y=2y-2\Rightarrow 5y=14\Rightarrow y=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}=2{,}8$$
$$\frac{5-x}{x-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3(5-x)=2(x-1)\Rightarrow 15-3x=2x-2\Rightarrow 5x=17\Rightarrow x=\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}=3{,}4$$

Возможны решения, связанные с пересечением прямой, проходящей через точки A и B, с окружностью (I) или использованием коллинеарности векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$, записанном в координатах.

Ответ. $x=3{,}4$, $y=2{,}8$ или в обыкновенных дробях $\left(3\frac{2}{5};2\frac{4}{5}\right)$.

Задача №4. Сумма первых 24 членов арифметической прогрессии равна 33, а сумма первых 24 членов другой арифметической прогрессии, имеющей тот же первый член, но противоположную по знаку разность, равна (-8). Найти первые члены этих прогрессий и разности обеих прогрессий.

Решение: Пусть a — первый член прогрессии, а d — разность первой прогрессии. Тогда:
сумма первой прогрессии: $24a + (d + 2d + \cdots + 23d) = 33$;
сумма второй прогрессии: $24a - (d + 2d + \cdots + 23d) = -8$.

Отсюда видим, что первый член равен $\frac{25}{48}$.

Далее, $2(d + 2d + \cdots + 23d) = 41 \Rightarrow 2\frac{d + 23d}{2} \cdot 23 = 41 \Rightarrow d = \frac{41}{23 \cdot 24} = \frac{41}{552}$ (для прогрессии с $d > 0$), $d = -\frac{41}{23 \cdot 24} = -\frac{41}{552}$ (если $d < 0$).

Ответ: $\frac{25}{48}$, $\pm\frac{41}{552}$.

Задача №5. При каких целых положительных m полином $P(x) = m^2x^{2024m+3} - 25x^{m+1} + 150x^{2023}$ делится на многочлен $(x^2 - 1)$?

Решение: Чтобы многочлен $P(x)$ нацело делился на $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ нужно, чтобы выполнялось $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

Найдем: $P(1) = m^2 - 25m + 150 = 0 \Rightarrow (m - 10)(m - 15) = 0 \Rightarrow m = 10$, $m = 15$.

$P(-1) = m^2(-1) - 25m(-1)(-1)^m - 150 =$

$$= \begin{cases} \text{а)} \ -m^2 + 25m - 150 = -(m-10)(m-15) = 0 \text{ при четном } m, \\ \text{б)} \ -m^2 - 25m - 150 = -(m+10)(m+15) = 0 \text{ при нечетном } m. \end{cases}$$

В подслучае:
а) $m = 10$ и $m = 15$ (не подходит, m — четное);
б) $m = -10$ и $m = -15$ (не подходят).

Поскольку $P(1) = 0$ и $P(-1) = 0$ должны выполняться одновременно, то $m = 10$.

Ответ: 10.

Задача №6. Сколько существует различных натуральных четырехзначных чисел, каждое из которых при прибавлении 6 делится на 7, при прибавлении 7 делится на 8, при прибавлении 8 делится на 9, при прибавлении 9 делится на 10? Ответ обосновать. Привести эти числа.

Решение: Поскольку $x + 6$ делится на 7, то $x - 1$ также делится на 7, аналогично $x - 1$ делится на 8, на 9 и на 10. Наименьшим из чисел $x - 1$, удовлетворяющим этим условиям, будет $\text{НОК}(7, 8, 9, 10) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520$ (т.е. $x_1 = 2521$).

Следующим числом будет $x - 1 = 5040$ (т.е. $x_2 = 5041$) и далее $x - 1 = 7560$ (т.е. $x_3 = 7561$). Далее следующее число будет пятизначным.

Ответ: 3, 2521, 5041, 7561.

Задача №7. Старательный ученик внимательно раскрыл скобки и привел все подобные слагаемые в выражении

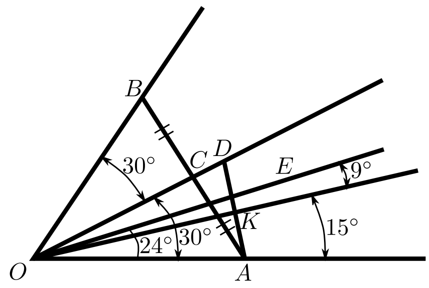
$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{30})^3 + (1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{30})^3.$$

Сколько членов будет содержать многочлен, полученный этим учеником?

Решение: При возведении в куб первой скобки образуются слагаемые, показатель степени у которых четен и находится в границах от 0 до 90 включительно. Аналогично для второй скобки, только показатели кратны трем. Значит, первая скобка дает 46 членов итогового многочлена, вторая скобка — 31. Но среди них будут подобные слагаемые, показатели степени которых кратны шести, таких слагаемых имеется 16. Итак, всего ленов будет $46 + 31 - 16 = 61$.

Ответ: 61.

Задача №8. На плоскости задан угол в $24°$. С его использованием с помощью циркуля и линейки постройте угол в $9°$.



Решение: Сначала построим равносторонний треугольник и проведем в нем биссектрису, получим угол в $30°$, затем еще раз проведем биссектрису для угла $30°$, получим угол в $15°$. Тогда $24° - 15° = 9°$ (схема построения на рис.).

1) строится равносторонний треугольник OBA;

2) BA делится пополам, проводим биссектрису OC, $BC = CA$;

3) на луче OC находим точку D, такую, что $OD = OA$, делим DA пополам и проведем биссектрису $\triangle ODA$. Тогда $\angle KOA = 15°$, а значит $\angle EOK = 24° - 15° = 9°$.

Задача №9. Три числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой q — натуральное число. Найти знаменатель, если $b_1 = 8$, а $2b_2 - \dfrac{b_3}{2} > 15$.

Решение: $b_1 = 8$, $b_2 = 8q$, $b_3 = 8q^2$. $16q - 4q^2 > 15 \Rightarrow -4q^2 + 16q - 15 > 0 \Rightarrow 4q^2 - 16q + 15 < 0 \Rightarrow q \in \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow q = 2$.

Ответ: $q = 2$.

Задача №10. Найдите площадь фигуры, каждая точка $(x; y)$ которой в прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяет неравенству

$$x^2 + y^2 \leq 8|x| + 6|y|.$$

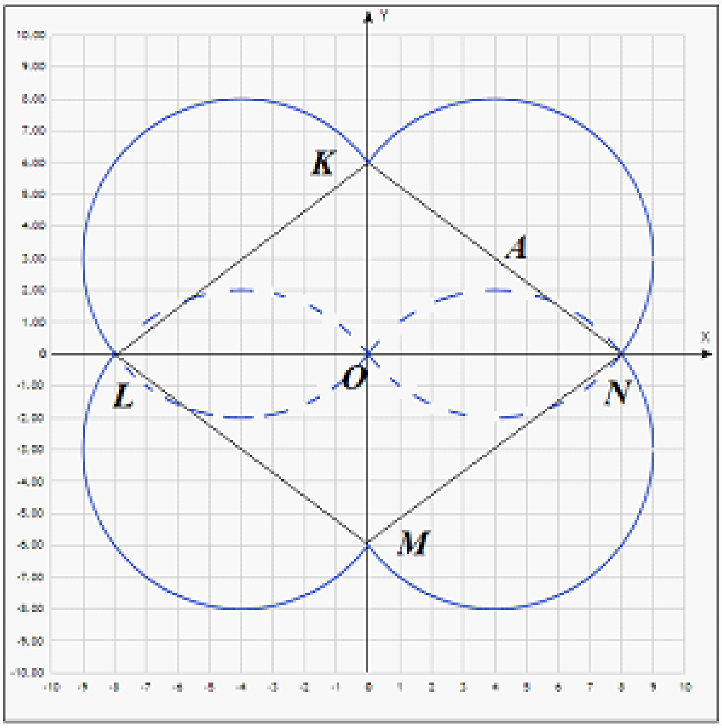
Решение: Перепишем неравенство в виде

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 25.$$

Заметим, что замена переменных x на $(-x)$ и y на $(-y)$ не изменяет неравенства, что означает симметрию фигуры относительно осей координат и точки $O(0; 0)$. Поэтому построим фигуру в первой четверти, а затем применим симметрии относительно координатных осей:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 25.$$

Этим неравенствам удовлетворяют все точки первой четверти, лежащие внутри круга с центром в точке $A(4; 3)$ радиуса $r = 5$.



Для вычисления площади фигуры разобьём её диаметрами KL, LM, MN и NK окружностей на ромб $KLMN$ и четыре полукруга, построенных на его сторонах как на диаметрах во внешнюю сторону.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = 96 + 50\pi.$$

Ответ: $96 + 50\pi$.