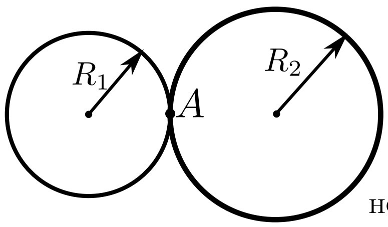
САММАТ-2023
Решение задач 6 класса

Задача №1. Две окружности радиуса $R_1 = 16$ и $R_2 = 24$ соприкасаются в одной точке, из которой одновременно начинают двигаться два муравья, каждый по своей окружности, с одинаковой скоростью. Какой путь пройдет каждый из муравьев до первой встречи в начальной точке, из которой они стартовали?



Решение: Пройденный путь до встречи муравьев:
I — $S_1 = 2\pi R_1 \cdot n_1 = Vt$,
II — $S_2 = 2\pi R_2 \cdot n_2 = Vt$,
$S_1 = S_2$,
где n_1 и n_2 — количество полных оборотов по окружности первого и второго муравья.

$R_1 \cdot n_1 = R_2 \cdot n_2 \Longrightarrow 2n_1 = 3n_2$. В натуральных числах это уравнение имеет решение $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ — такое количество оборотов по окружности совершат первый и второй муравьи.

Пройденный путь: $S_2 = S_1 = 2\pi R_1 \cdot n_1 = 2\pi \cdot 16 \cdot 3 = 96\pi$.

Ответ: 96π.

Задача №2. В классе 30 учеников. Средний рост всех учеников 160 см. Когда из класса перевелся в другой класс ученик с ростом 145 см, а в класс пришел новый ученик, то средний рост учеников в этом классе стал 161 см. Какой рост у пришедшего ученика?

Решение: Пусть x — рост пришедшего ученика. Суммарный рост после ухода одного ученика: $160 \cdot 30 - 145 = 4655$.

Тогда средний рост класса после прихода нового ученика:

$$(4655 + x)/30 = 161 \Longrightarrow x = 175 \text{ см.}$$

Ответ: 175 см.

Задача №3. К числу 2023 приписали слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, делящееся на 27. Найдите все такие числа.

Примеры: Для того, чтобы число $a2023b$ делилось на 27, достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 9. По признаку делимости на 3 делятся только те числа, сумма цифр которых кратна 3, а на 9 — сумма цифр которых кратна 9. Поэтому имеем равенства

$$a + 2 + 0 + 2 + 3 + b = 3n,$$
$$a + 2 + 0 + 2 + 3 + b = 9m,$$

где n, m — натуральные.

Первое условие выполняется, если выполняется второе. Поэтому

$$a + b + 7 = 9m \text{ или } a + b = 9m - 7.$$

Исследуем $m = 1$: $a + b = 2 \Longrightarrow$
$a = 0$, $b = 2$ (не подходит)

$a = 1$, $b = 1$ получаем 120231
$a = 2$, $b = 0$ (не подходит)
$m = 2$: $a + b = 11 \Longrightarrow$
$a = 2$, $b = 9$ получаем 220239
$a = 3$, $b = 8$ (не подходит)
$a = 4$, $b = 7$ (не подходит)
$a = 5$, $b = 6$ получаем 520236
$a = 6$, $b = 5$ (не подходит)
$a = 7$, $b = 4$ (не подходит)
$a = 8$, $b = 3$ получаем 820233
$a = 9$, $b = 2$ (не подходит)

Ответ: 120231, 220239, 520236, 820233.

Задача №4. В кондитерском магазине продаются конфеты трех видов: карамельки по 3 рубля, ириски по 5 рублей и шоколадки по 10 рублей. Варя хотела приобрести ровно по 8 конфет каждого вида и захватила с собой 200 рублей. Утром она увидела в магазине объявления:«При оплате трех шоколадок получи на кассе бесплатную ириску» и «При оплате трех ирисок получи на кассе бесплатную карамельку». Сколько денег останется у Вари, когда у нее окажется по 8 конфет каждого вида?

Решение: Поскольку Варя купит больше шести, но меньше девяти шоколадок, она получит бесплатно две ириски. Тогда ей останется купить еще 6 ирисок, за что она получит бесплатно две карамельки, после чего ей останется купить еще 6 карамелек. Тогда она потратит всего $8 \cdot 10 + 6 \cdot +6 \cdot 3 = 128$ рублей. При этом у нее останется $200 - 128 = 72$ рубля.

Ответ: 72 рубля.

Задача №5. У продавца имеется емкость с молоком объемом 24 литра, а также две пустые емкости объемом 10 и 14 литров. Каким образом отмерить 12 литров?

Решение: Составим таблицу и выполним серию переливаний по алгоритму в таблице

12 л	V_1	24	10	10	20	20	6	6	16	16	2	2
14 л	V_2	0	14	4	4	0	14	8	8	0	14	**12**
10 л	V_3	0	0	10	0	4	4	10	0	8	8	10

Задача №6. На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2023. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, числа, кратные 5, и числа, кратные 12. Сколько незачеркнутых чисел осталось на доске?

Решение: Достаточно вычеркнуть только числа, делящиеся на 3 и 5, т.к. 12 кратно 3. Каждое третье число делится на 3, всего таких чисел 674 ($2023 : 3 \approx 674{,}33$). Каждое пятое число делится на 5, всего таких чисел 404 ($2023 : 5 = 404{,}6$). Заметим, что некоторые числа делятся одновременно и на 3, и на 5, их учли дважды. $\text{НОК}(3; 5) = 15$. $2023 : 15 \approx 134{,}84$, 134 числа делятся и на 3, и на 5. Получаем, что на доске осталось записано $2023 - 674 - 404 + 134 = 1079$ чисел.

Ответ: 1079.

Задача №7. Найдите решение ребуса

$$A \cdot B + A + B = \overline{AB},$$

A и B — две различные цифры; запись $\overline{AB}$ означает двузначное число (то есть $A \neq 0$), составленное из цифр A и B. В качестве ответа напишите числа $\overline{AB}$.

Решение: Докажем, что

$$B = 9.$$
$$A \cdot B + A + B = \overline{AB};$$
$$A \cdot B + A = \overline{A0};$$
$$(B+1) \cdot A = \overline{A0};$$
$$B + 1 = 10;$$
$$B = 9.$$

Величина A может принимать любые значения от 1 до 8.

Ответ: Варианты ответа: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89.

Задача №8. Найдите две последние цифры, на которые оканчивается сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2.$$

Решение: Найдем квадраты чисел $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 256 + 625$ и т.д. Последние цифры у сумм по 10 членов повторяются. Поэтому сложим последние числа у первых 10 членов и умножим на 5. Получим число единиц:

$$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45.$$

Далее $45 \cdot 5 = 225$ единиц. Значит 2 последние цифры 25.

Ответ: 25.

Задача №9. Произведение пятизначного числа на 8 есть куб натурального числа. Найти наименьшее из таких пятизначных чисел.

Решение: x — искомое число, $8x = a^3$. a^3 — кратно 8, значит и a кратно 2, т.е. $a = 2b$. Тогда $x = b^3$. Найдем такие b, которые дают искомое пятизначное число.

$b = 20$ — 8000 — не удовлетворяет условию.

$b = 21$ — 9261 — не удовлетворяет условию.

$b = 22$ — 10648 — это и есть ответ, поскольку при $b > 22$ будем иметь большие значения.

Ответ: 10648.

Задача №10. В корзине находится не более 48 шаров четырех цветов: красные, белые, черные и синие. Красные составляют $\frac{1}{3}$ от их количества, белые — $\frac{1}{5}$ и черные — $\frac{1}{9}$. Сколько в корзине синих шаров?

Решение: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{29}{45}$. Поскольку дробь несократимая и знаменатель $45 < 48$, то синих шаров $45 - 29 = 16$.

Ответ: 16.